[Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique]

ANALYSE NUMÉRIQUE. — *Approximation par troncature de domaine de la solution du problème aux limites extérieur pour le système de Maxwell en régime sinusoïdal.* Note (*) de **Abderrahmane Bendali** et **Laurence Halpern**, présentée par Jacques-Louis Lions.

L'étude de la diffraction électromagnétique par un obstacle parfaitement conducteur donne lieu à un problème aux limites extérieur. A partir de la condition de radiation du second ordre pour l'équation d'Helmholtz, ce problème est remplacé par un problème aux limites posé dans un domaine borné. Nous montrons que le problème introduit admet une formulation variationnelle, qu'il est bien posé et donnons des estimations de l'erreur due à la troncature du domaine.

NUMERICAL ANALYSIS. — Approximation of the Solution of the Exterior Boundary Problem for the Maxwell System in Sinusoidal form Using Truncation of Domain.

The study of electromagnetic diffraction by a perfectly conducting obstacle leads to an exterior boundary value problem. Starting from the second order radiation condition for the Helmholtz equation, this problem is replaced by a boundary value problem stated on a bounded domain. We give a variational formulation for the newly introduced problem and show it to be well-posed. Finally, we estimate the error due to the truncation of the domain.

1. INTRODUCTION. — Le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle $\overline{\Omega}_{\text{int}}$, variété à bord compacte C^∞ de $\mathbb{R}^3$, conduit au problème aux limites suivant posé dans le domaine extérieur $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_{\text{int}}$ (*cf.* e. g. [1], [2]) :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Déterminer } \mathbf{u} \text{ dans } \mathbb{H}^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega}) \text{ [3]}, \\ \Delta\mathbf{u}+k^2\mathbf{u}=0; \qquad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega), \\ \mathbf{n}\wedge\mathbf{u}=\mathbf{c} \quad \text{dans } \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma), \\ \operatorname{rot}\mathbf{u}\wedge\dfrac{\mathbf{r}}{r}-ik\,\mathbf{u}=o\left(\dfrac{1}{r}\right) \quad \text{[4]}. \end{array}\right.$$

$\Gamma=\partial\Omega$; $\mathbf{n}$ normale à Γ orientée vers l'intérieur de Ω; $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ est le nombre d'onde; $\mathbf{c}=-\mathbf{n}\wedge\mathbf{u}^i$, où $\mathbf{u}^i$ est le champ électrique dû à l'onde incidente. $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur du point générique x de $\mathbb{R}^3$ et $r=|\mathbf{r}|$ son module.

D'une façon plus générale, on démontre (*cf.* [2]) les résultats suivants : étant donnés $\mathbf{f}\in L^2(\Omega)$, à *support borné*, $\mathbf{c}$ dans $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$ et tangent à Γ et g dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, le problème :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Déterminer } \mathbf{u} \text{ dans } \mathbb{H}^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega}), \\ \Delta\mathbf{u}+k^2\mathbf{u}=-\mathbf{f} \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega), \\ \mathbf{n}\wedge\mathbf{u}=\mathbf{c} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=g \quad \text{sur } \Gamma, \\ \operatorname{rot}\mathbf{u}\wedge\dfrac{\mathbf{r}}{r}+\dfrac{\mathbf{r}}{r}\operatorname{div}\mathbf{u}-ik\,\mathbf{u}=o\left(\dfrac{1}{r}\right), \end{array}\right.$$

possède une solution et une seule. De plus, le cas $\mathbf{f}=0$ et $g=0$ donne lieu à une solution pour le problème (1) et pour tout réel $s\geq 0$ si $\mathbf{c}\in\mathbb{H}^{(1/2)+s}(\Gamma)$, $g\in H^{-(1/2)+s}(\Gamma)$ et $\mathbf{f}\in\mathbb{H}^t(\Omega)$, $t=\max(0, s-1)$, $\mathbf{u}$ appartient à $\mathbb{H}^{1+s}_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$.

Remarque 1. — On obtient une formulation équivalente du problème (2) en remplaçant la condition de radiation $\operatorname{rot}\mathbf{u}\wedge(\mathbf{r}/r)+(\mathbf{r}/r)\operatorname{div}\mathbf{u}-ik\,\mathbf{u}=O(1/r)$ par la condition d'ordre 2 :

$$(3)\quad \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial r}-ik\,\mathbf{u}+\frac{1}{r}\mathbf{u}=o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{[5]}.$$

Pour $R>0$, assez grand, on introduit le problème aux limites dans le domaine borné $\Omega_R=\{x\in\Omega;\ |x|<R\}$:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Déterminer } \mathbf{u}^R\in\mathbb{H}^1(\Omega_R),\\ \Delta\mathbf{u}^R+k^2\,\mathbf{u}^R=-\mathbf{f}\quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega_R),\\ \mathbf{n}\wedge\mathbf{u}^R=\mathbf{c},\qquad \operatorname{div}\mathbf{u}^R=g\quad \text{sur } \Gamma,\\ \dfrac{\partial\mathbf{u}^R}{\partial r}-ik\,\mathbf{u}^R+\dfrac{1}{R}\mathbf{u}^R=0\quad \text{sur } S_R, \end{array}\right.$$

où S_R est la sphère de $\mathbb{R}^3$ de rayon R centrée en 0. Nous montrons que le problème (4) admet une formulation variationnelle, qu'il est bien posé, et que la solution $\mathbf{u}^R$ ainsi que $\operatorname{div}\mathbf{u}^R$ sont proches respectivement de $\mathbf{u}$ la solution de (2) et de $\operatorname{div}\mathbf{u}$. Notons que ce type de méthodes ne permet généralement pas d'avoir des estimations de l'écart entre les dérivées des solutions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}^R$ (*cf.* e. g. [6]). L'estimation sur les divergences est importante dans la mesure où le problème intéressant ici est le système de Maxwell (1).

2. Formulation variationnelle. — On pose pour $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dans V :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} V=\{\mathbf{v}\in\mathbb{H}^1(\Omega_R);\ \mathbf{n}\wedge\mathbf{v}=0 \text{ sur } \Gamma\},\\ a(\mathbf{u},\mathbf{v})=\displaystyle\int_{\Omega_R}\{(\operatorname{rot}\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v})+\operatorname{div}\mathbf{u}\,\overline{\operatorname{div}\mathbf{v}}-k^2(\mathbf{u},\mathbf{v})\}\,dx+\ldots\\ \qquad -\Big(\langle\operatorname{div}_{S_R}\mathbf{u}_t,\ v_r\rangle_{S_R}+\langle\overline{\operatorname{div}_{S_R}\mathbf{v}_t,\ u_r}\rangle_{S_R}\\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_{S_R}\Big\{ik(\mathbf{u},\mathbf{v})+\frac{1}{R}u_r\bar{v}_r\Big\}\,dS_R\Big), \end{array}\right.$$

où $\mathbf{u}_t$ et u_r sont respectivement les composantes azimutale et radiale de $\mathbf{u}$, div_{S_R} est la divergence superficielle d'un champ tangent à S_R. On a alors :

Théorème 1. — *Le problème variationnel :*

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{u}^R\in V(\mathbf{c});\qquad \forall\mathbf{v}\in V,\\ \quad a(\mathbf{u}^R,\mathbf{v})=L(\mathbf{v}), \end{array}\right.$$

où :

$$V(\mathbf{c})=\{\mathbf{v}\in\mathbb{H}^1(\Omega_R);\ \mathbf{n}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{c}\ \textit{sur}\ \Gamma\}$$

et :

$$L(\mathbf{v})=\int_\Omega(\mathbf{f},\mathbf{v})\,dx+\langle g,(\mathbf{v},\mathbf{n})\rangle_\Gamma$$

admet une solution et une seule qui est l'unique solution du problème (4).

Démonstration. — On se ramène aux conditions d'application d'une version généralisée du lemme de Lax-Milgram (cf. e. g. [7]) en vérifiant qu'il existe une constante $c>0$, dépendante de R, telle que pour tout $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans V, on ait :

$$\sup_{\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega_R}\leqq 1}|a(\mathbf{u},\mathbf{v})|\geqq c\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_R}$$

et :

$$\sup_{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_R}\leqq 1}|a(\mathbf{u},\mathbf{v})|\geqq c\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega_R}.$$

3. ESTIMATIONS D'ERREUR. — L'écart $\mathbf{e}^R = \mathbf{u} - \mathbf{u}^R$ entre la solution $\mathbf{u}$ de (2) et celle $\mathbf{u}^R$ de (4) ainsi qu'une estimation de $\operatorname{div} \mathbf{e}^R$ sont donnés par :

THÉORÈME 2. — *Pour tout ouvert borné* $B \subset \Omega$, *il existe une constante* C *telle que pour tout* $\mathbf{f}$ *tel que* $\operatorname{supp} \mathbf{f} \subset \overline{B}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$ *tangent à* Γ, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *et* R *suffisamment grand, on ait :*

$$\|\mathbf{e}^R\|_{0, B} + \|\operatorname{div} \mathbf{e}^R\|_{0, B} \leq \frac{C}{R^2}(\|\mathbf{f}\|_{0, \Omega} + \|\mathbf{c}\|_{1/2, \Gamma} + \|g\|_{-1/2, \Gamma}). \tag{7}$$

Démonstration. — On introduit $\mathbf{\Phi}$ solution « rentrante » obtenue en remplaçant dans (2) $\mathbf{f}$ par $\widetilde{\mathbf{e}^R|_B}$ (où le tilda indique le prolongement par 0 à Ω), $\mathbf{c}$, g par 0 et k par $-k$. La formule de Green donne alors :

$$\|\mathbf{e}^R\|_{0, B}^2 = \int_{S_R} \left\{ \left(\mathbf{e}^R, \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{e}^R}{\partial r}, \mathbf{\Phi} \right) \right\} ds_R. \tag{8}$$

En notant $\mathbf{w} = \partial \mathbf{u}/\partial r - ik\,\mathbf{u} + (1/r)\,\mathbf{u}$; $\mathbf{\Psi} = (\partial \mathbf{\Phi}/\partial r) + ik\,\mathbf{\Phi} + (1/r)\,\mathbf{\Phi}$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$\|\mathbf{e}^R\|_{0, B}^2 \leq \|\mathbf{e}^R\|_{0, S_R} \|\mathbf{\Psi}\|_{0, S_R} + \|\mathbf{w}\|_{0, S_R} \|\mathbf{\Phi}\|_{0, S_R}. \tag{9}$$

La formulation variationnelle (6) de (4) donne $a(\mathbf{e}^R, \mathbf{e}^R) = \int_{S_R} (\mathbf{w}, \mathbf{e}^R)\, dS_R$. En particulier, l'égalité des parties imaginaires des deux membres de cette relation donne :

$$k\,\|\mathbf{e}^R\|_{0, S_R}^2 = \left| \operatorname{Im} \int_{S_R} (\mathbf{w}, \mathbf{e}^R)\, dS_R \right|. \tag{10}$$

On arrive alors à :

$$\|\mathbf{e}^R\|_{0, B}^2 \leq \|\mathbf{w}\|_{0, S_R} \left(\frac{1}{k} \|\mathbf{\Psi}\|_{0, S_R} + \|\mathbf{\Phi}\|_{0, S_R} \right). \tag{11}$$

Les estimations à distance finie dans (2) et la représentation intégrale des solutions « sortantes » ou « entrantes » de l'équation d'Helmholtz permettent alors de prouver (7). L'estimation sur $\operatorname{div} \mathbf{e}^R$ se fait selon le même principe en introduisant $\mathbf{\Phi} = \operatorname{grad} \varphi$. φ est la solution « rentrante » du problème de Dirichlet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \in H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega}); \qquad \Delta \varphi + k^2 \varphi = -\widetilde{\operatorname{div} \mathbf{e}^R|_B} \quad \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} + ik\,\varphi = o\left(\dfrac{1}{r}\right). \end{array} \right. \tag{12}$$

(*) Remise le 19 avril 1982.

[1] W. KNAUFF et R. KRESS, *J. Math. Analys. Appl.*, 72, 1979.

[2] A. BENDALI, *Problèmes aux limites extérieur et intérieur pour le système de Maxwell en régime harmonique*, Rapport interne n° 59, Centre de Mathématiques appliquées, École Polytechnique, Palaiseau.

[3] $\mathbb{H}^s(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des champs $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ avec $u^i \in H^s(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$. $\mathbb{H}^s_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$ est l'espace de Fréchet des champs $\mathbf{u} \in \{\mathscr{D}'(\Omega)\}^3$ tel que $\varphi\,\mathbf{u} \in \mathbb{H}^s(\Omega)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{3} u^i \bar{v}^i$ est le produit hermitien de deux vecteurs à composantes complexes. $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ pour S surface régulière de $\mathbb{R}^3$ est le crochet d'antidualité entre $H^{-1/2}(S)$ et $H^{1/2}(S)$. Pour le reste, les notations sont celles en usage dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

[4] $o\ (1/r^\alpha)$ indique comme il est d'usage une fonction tendant vers zéro plus vite que $1/r^\alpha$ lorsque r tend vers $+\infty$. On suppose implicitement que la convergence est uniforme par rapport aux variables angulaires $\mathbf{r}/r$.

[5] A. BAYLISS et E. TURKEL, *Comm. Pure Appl. Math.*, XXXIII, 1980.

[6] C. I. GOLDSTEIN, *The Finite Element Method with Non-Uniform Mesh Sizes Applied to Exterior Helmholtz Equation* [*Num. Math.*] (à paraître).

[7] I. BABUSKA et A. K. AZIZ, *Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1972.

École polytechnique, Centre de Mathématiques appliquées, E.R.A. n° 747, 91128 *Palaiseau Cedex.*